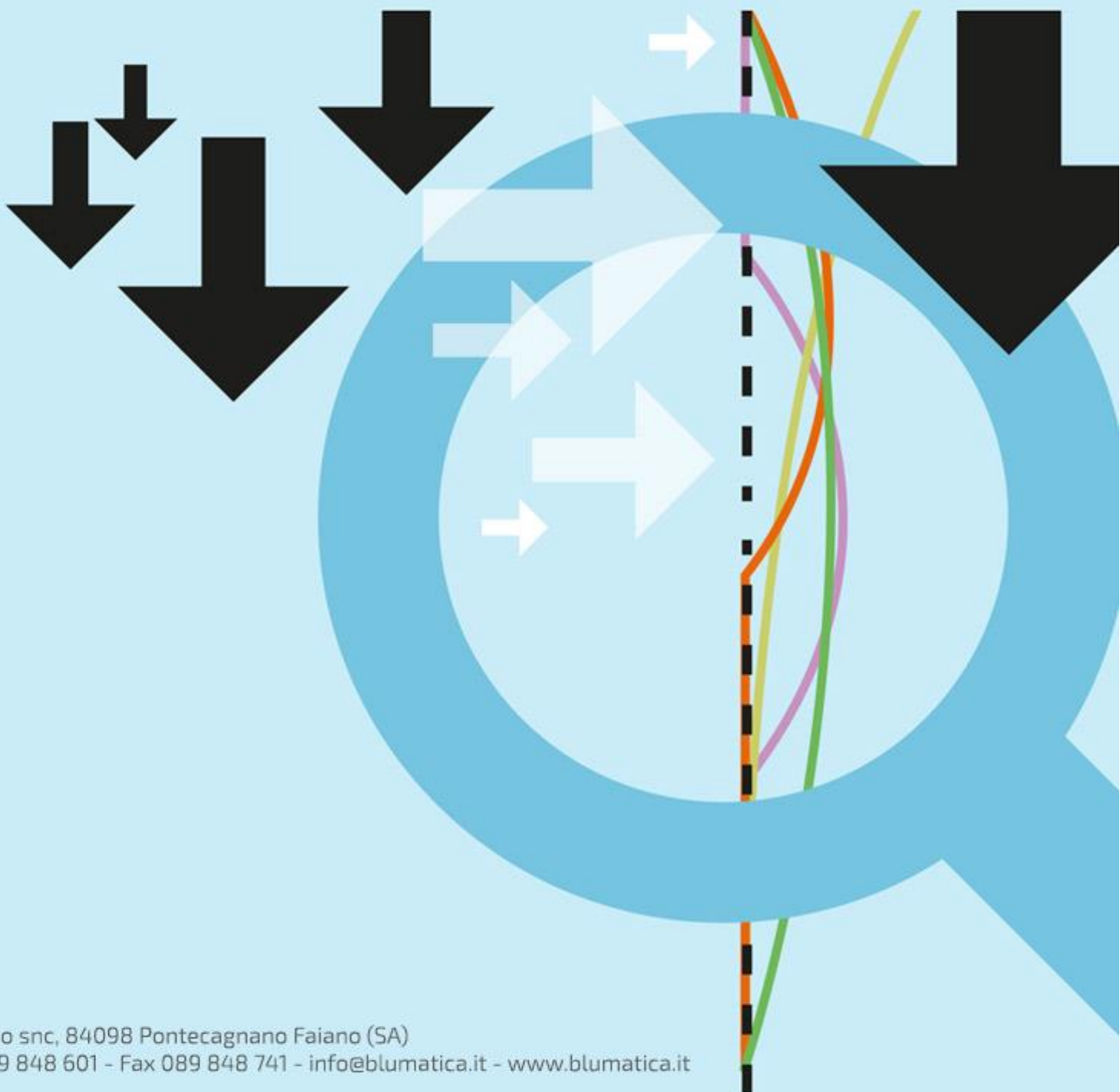


Compressione e Pressoflessione: come eseguire la verifica di instabilità?

Mariafortuna Spina



Compressione e Pressoflessione: come eseguire la verifica di instabilità?

Il problema dell'instabilità dei profili in acciaio e le risposte dell'Eurocodice 3 e della NTC2018

Il problema dell'instabilità è fortemente correlato allo studio del comportamento strutturale dell'elemento "colonna", elemento più studiato nella storia delle costruzioni. La trattazione di questo delicato argomento viene affrontata attraverso un excursus storico che, partendo dalla definizione del problema, arriva all'attuale normativa tecnica ed esplicita le verifiche da effettuare in funzione delle diverse condizioni di carico.

CARICO CRITICO ELASTICO

Seppur osservazioni qualitative sulla stabilità si fanno risalire a Erone d'Alessandria (primi decenni dopo Cristo), mentre descrizioni delle colonne "instabilizzate" si ritrovano negli schizzi di Leonardo da Vinci (1452-1519), i primi effettivi modelli fisici di comportamento arrivano solo con le teorie di P. Van Musschenbroek (1693-1761), al quale si deve anche la correlazione del fenomeno dell'instabilità con il quadrato della luce attraverso legge di proporzionalità inversa.

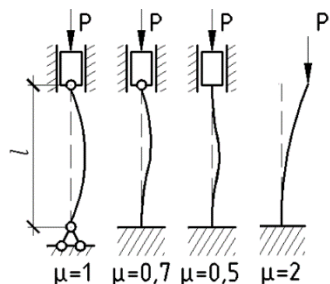
Sono, però le ricerche di Eulero (1707-1783), ispirate alla linea elastica proposta da D. Bernoulli (1700-1782), a dare luce alla ben nota formula del carico critico elastico, ovvero quel valore limite che segna l'inizio dei grandi spostamenti. La formulazione fu poi estesa dallo stesso Bernoulli che introdusse la correlazione tra il problema dell'instabilità e le condizioni al contorno (condizioni di vincolo) e quindi il concetto di "lunghezza libera di inflessione" intesa come distanza tra due punti di flesso della deformata elastica dell'asta.

La formula per il calcolo del carico critico euleriano si presenta attualmente nella seguente forma:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

Con:

- E Modulo elastico del materiale costituente la sezione;
- I Inerzia della sezione trasversale;
- $l_0 = \mu * l$ Lunghezza libera di inflessione;
 - l Lunghezza dell'asta vincolata;
 - μ Coefficiente di vincolo.



I valori del coefficiente per alcuni casi di vincolo sono:

- $\mu = 1$ Trave vincolata con 2 cerniere agli estremi;
- $\mu = 2$ Trave vincolata con un solo incastro perfetto (mensola);
- $\mu = 0,5$ Trave vincolata con 2 incastri perfetti agli estremi;
- $\mu = 0,7$ Trave vincolata con un incastro perfetto e una cerniera.

Il valore di tensione raggiunto dall'asta quando la sollecitazione raggiunge il valore critico euleriano, in ipotesi di perfetta centralità del carico è il seguente, anche noto come "Tensione Critica":

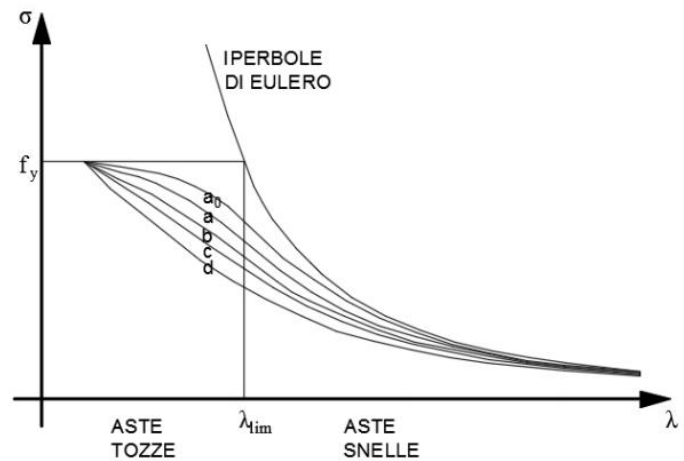
$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al_0^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Dove $\lambda = \frac{l_0}{\rho}$, rapporto tra la lunghezza libera di inflessione l_0 e il raggio d'inerzia della sezione costituente l'asta considerata ρ , è adimensionale ed è definito come snellezza dell'asta nel piano di verifica considerato.

Fu L. Navier (1785 - 1829) ad individuare la connessione tra il carico limite euleriano e i risultati sperimentali. Risulta, infatti, che N_{cr} rappresenta il limite superiore dei risultati raggiungibili in termini di portanza dell'asta durante le sperimentazioni. Da tale considerazione nasce la definizione, in relazione al materiale strutturale (legno, ghisa, ferro), della "snellezza limite"

$$\lambda_y = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

ovvero quel valore che separa le aste snelle ($\lambda > \lambda_y$) dalle aste tozze ($\lambda < \lambda_y$), per le quali il collasso avviene prevalentemente per schiacciamento del materiale. Dove f_y rappresenta il limite elastico del materiale considerato.



EFFETTI DEL SECONDO ORDINE

"considerevoli irregolarità possono essere osservate in tutti gli esperimenti... e, non c'è dubbio, alcune di queste sono causate dalla difficoltà di applicare forze perfettamente centrate ed altre delle accidentali disomogeneità dei materiali, le cui fibre possono essere state spesso deformate in qualche direzione, sì da generare una colonna originariamente incurvata piuttosto che una dritta" **T. Young (1773- 1829)**

Attraverso l'osservazione del comportamento di un'asta soggetta a un'imperfezione iniziale in mezzaria δ_0 e sottoposta a un carico N , Young formulò che il momento flettente massimo del secondo ordine a cui l'asta stessa è soggetta è pari a:

$$M_2 = \frac{N\delta_0}{1 - N/N_{cr}}$$

Dove $\frac{1}{1 - N/N_{cr}}$ rappresenta il coefficiente di amplificazione della freccia per effetto dell'imperfezione dell'asta stessa.

Young postulò che il carico limite N_c di una colonna con deformazione iniziale δ_0 è raggiunto quando si raggiunge, nella fibra più esterna, la tensione limite sopportabile dal materiale costituente l'asta

$$\sigma_{lim} = \frac{N_c}{A} + \frac{N_c \delta_0}{W \left(1 - N/N_{cr}\right)}$$

Con

- A area;
- W modulo di resistenza della sezione trasversale.

Imponendo che σ_{lim} sia uguale alla resistenza caratteristica del materiale base f_y e indicando con $\sigma_c = N_c/A$ e $\sigma_{cr} = N_{cr}/A$, la precedente formula può essere trasformata così:

$$(f_y - \sigma_c)(\sigma_{cr} - \sigma_c) = \eta \sigma_{cr} \sigma_c$$

Con $\eta = \delta_0 A/W$

Anche se Young utilizzò il parametro η per descrivere un'imperfezione geometrica, il suo significato può essere esteso, in un'ottica generale, anche all'effetto delle imperfezioni meccaniche, quali tensioni residue e disperazioni del limite elastico nella sezione trasversale.

PRESSIONE CENTRATA E NORMATIVA TECNICA PER L'INSTABILITA' DEI PROFILI IN ACCIAIO

Secondo il decreto del 17 gennaio 2018 - Aggiornamento delle "Norme tecniche per le costruzioni", meglio noto come NTC2018, la resistenza di progetto all'instabilità nell'asta compressa è data dalla seguente formula

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_{yk}}{\gamma_{M1}}$$

Dove "b" sta per buckling, A è l'area della sezione, γ_{M1} è il coefficiente di sicurezza del materiale e f_{yk} è la resistenza del materiale costituente la sezione.

La valutazione dell'effettiva riduzione di resistenza del profilo per effetto dei fenomeni di instabilità è tutta contenuta nella definizione e valutazione del coefficiente χ . Esso è valutato secondo la seguente formula:

$$\chi = \frac{1}{\chi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1$$

Con $\phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda}^2 - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$.

Tale formula lega la definizione del parametro di riduzione χ da un lato alla snellezza adimensionalizzata

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_y} = \sqrt{\frac{A f_{yk}}{N_{cr}}}$$

Dall'altro coefficiente di imperfezione α , a sua volta funzione della specifica curva di instabilità per il profilo utilizzato

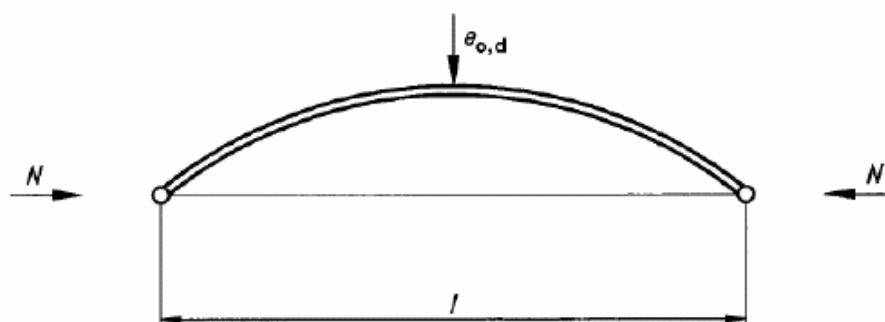
Curva di instabilità	a	b	c	d
Coefficienti di imperfezione α	0,21	0,34	0,49	0,76

Sezione trasversale		Limiti	Inflessione intorno all'asse	Curva di instabilità	
				S235, S275, S355, S420	S460
Sezioni laminate		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a a ₀
			$40 \text{ mm} < t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100 \text{ mm}$	y-y z-z	b a
			$t_f > 100 \text{ mm}$	y-y z-z	d c
Sezioni ad I saldate		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b c	b c
		$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c d	c d
Sezioni cave		Sezione formata "a caldo"	qualunque	a	a ₀
		Sezione formata "a freddo"	qualunque	c	c
Sezioni scatolari saldate		In generale	qualunque	b	b
		saldature "spesse": $a > 0,5t_f$ $b/t_f < 30$; $h/t_w < 30$	qualunque	c	c
Sezioni piene, ad U e T			qualunque	c	c
Sezioni ad L			qualunque	b	b

Per ottemperare alle richieste della NTC 2018 deve essere verificata la seguente disuguaglianza:

$$\frac{N}{N_{b,Rd}} \leq 1$$

La UNI EN 1993-1-1:2014 "Eurocodice 3 - Progettazione delle strutture di acciaio" propone un'alternativa alle modalità di verifica precedentemente descritte attraverso un'analisi diretta degli effetti del secondo ordine. In particolare, l'analisi del secondo ordine di una membratura deve considerare un'appropriata imperfezione di freccia iniziale equivalente, funzione della della pertinente curva d'instabilità, del metodo di analisi e del tipo di verifica della sezione trasversale.



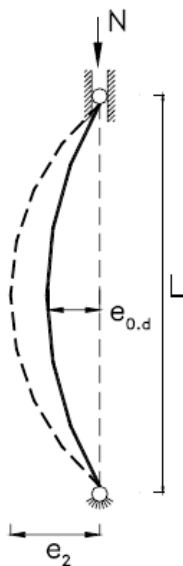
Sezione trasversale		Metodo di analisi globale				
Metodo usato per la verifica di resistenza	Tipo di sezione ed asse	Elastica o rigido-plastica o elastica-perfettamente-plastica		Elasto-plastica (metodo della zona plastica)		
Elastica [5.4.8.2]	Qualsiasi	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{el} \ell / A$		--		
Lineare plastica [5.4.8.1(2)]	Qualsiasi	$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{pl} \ell / A$		--		
Non lineare plastica [5.4.8.1 da (1) a (11)]	Sezione a I asse yy	$1,33 \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{pl} \ell / A$		$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{pl} \ell / A$		
	Sezione a I asse zz	$2,0 k_y e_{eff} / \varepsilon$		$k_y e_{eff} / \varepsilon$		
	Sezione cava rettangolare	$1,33 \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{pl} \ell / A$		$\alpha (\bar{\lambda} - 0,2) k_y W_{pl} \ell / A$		
	Sezione cava circolare	$1,5 k_y e_{eff} / \varepsilon$		$k_y e_{eff} / \varepsilon$		
$k_y = (1 - k_\delta) + 2 k_\delta \bar{\lambda}$ con la limitazione $k_y \geq 1,0$						
Curva di instabilità	α	e_{eff}	k_δ			
			$\gamma_{M1} = 1,05$	$\gamma_{M1} = 1,10$	$\gamma_{M1} = 1,15$	$\gamma_{M1} = 1,20$
a	0,21	$\ell/600$	0,12	0,23	0,33	0,42
b	0,34	$\ell/380$	0,08	0,15	0,22	0,28
c	0,49	$\ell/270$	0,06	0,11	0,16	0,20
d	0,76	$\ell/180$	0,04	0,08	0,11	0,14
Membrature a sezione variabile:						
Usare il valore di $W_{el} \ell / A$ o $W_{pl} \ell / A$ al centro della lunghezza di libera inflessione ℓ .						

Ad esempio, si suppone di analizzare una struttura verificata e calcolata con metodo elastico. Il valore di imperfezione iniziale $e_{0,d}$ per il caso specifico diventa:

$$e_{0,d} = \alpha (\lambda^* - 0,2) k_y W_{el} / A$$

Supponiamo curva di instabilità **a**, dunque, $\alpha = 0,21$.

$$k_y = (1 - k_\delta) + 2 k_\delta \bar{\lambda} \geq 1,0$$



Con $k_\delta = 0,23$ per $\gamma_{M1} = 1,10$ e curva di instabilità **a**.

Il parametro $e_{0,d}$ rappresenta l'imperfezione iniziale in mezzeria per cui $e_{0,d}A/W_{el}$ è il coefficiente η della formula di Young. In funzione di quest'ultimo, così come formulato dallo stesso Young, è possibile calcolare e_2 , ovvero l'amplificazione della freccia per effetto dell'imperfezione iniziale dell'asta stessa.

$$e_2 = \frac{e_{0,d}}{1 - N/N_{cr}}$$

Ovvero la verifica a pressione centrata con effetti del secondo ordine, equivale a una verifica a pressoflessione:

$$f_{yd} \geq \frac{N}{A} + \frac{Ne_2}{W_{el}}$$

COME AFFRONTARE IL PROBLEMA DELL'INSTABILITA' IN CASO DI PRESSOFLESSIONE?

In accordo con la teoria del primo, la teoria di Young fornisce una metodologia di valutazione della freccia di inflessione in ipotesi di sforzo normale N e di imperfezione iniziale δ_0 caratterizzata da buona approssimazione:

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - N/N_{cr}}$$

Pertanto il momento flettente del secondo ordine può ricavarsi partendo da quello del primo ordine con la seguente espressione:

$$M_2 = M_1 + N\delta = M_1 + \frac{N\delta_0}{1 - N/N_{cr}} = M_1 / (1 - N/N_{cr}) \left(1 + \left(\frac{N_{cr}\delta_0}{M_1} - 1 \right) N/N_{cr} \right)$$

Ponendo $\Psi = \frac{N_{cr}\delta_0}{M_1} - 1$ e $N/N_{cr} = \theta$ risulta:

$$M_2 = \frac{M_1(1 + \Psi\theta)}{1 - \theta} = \frac{M_{eq}}{1 - \theta}$$

Tale approssimazione viene notevolmente impiegata dalle varie normative tecniche per la sua semplicità e perché evidenzia la condizione di instabilità, facendo tendere M all'infinito per $N = N_{cr}$.

La **NTC2018** in caso di verifiche di instabilità di un'asta pressoinflessa è di scarso contenuto, affermando semplicemente:

"Per elementi strutturali soggetti a compressione e flessione, si debbono studiare i relativi fenomeni di instabilità facendo riferimento a normative di comprovata validità"

Per la progettazione è, dunque, quasi obbligatorio riferirsi all'**Eurocodice 3**. La verifica all'instabilità delle membrature, con sezioni trasversali in classe 1 e 2 soggette all'azione combinata di momento flettente e azione assiale è, dunque, la seguente:

$$\frac{N}{N_{b,Rd}} + k \frac{M}{M_{c,Rd}} \leq 1$$

Con:

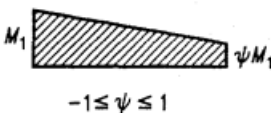
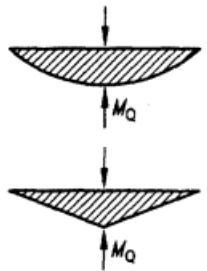
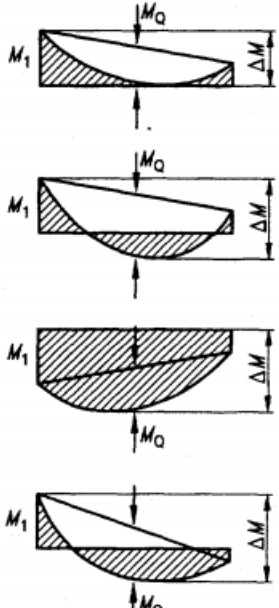
- $k = 1 - \frac{\mu N}{\gamma_{M1} N_{b,Rd}} \leq 1,5$
 - $\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) + \left(\frac{W_{pl} - W_{el}}{W_{el}}\right) \leq 0,9$

Se, a vantaggio di sicurezza, si lavora in campo elastico ovvero utilizzando il W_{el} la formula si trasforma in:

- $\mu = \bar{\lambda}(2\beta_M - 4) \leq 0,9$

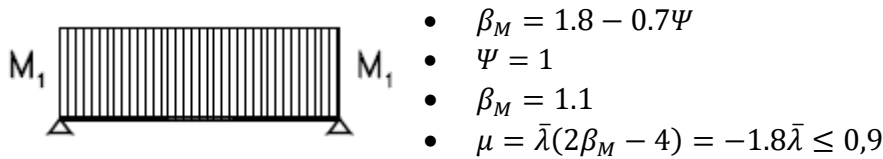
- $M_{c,Rd} = M_{pl,Rd}$ o $M_{c,Rd} = M_{el,Rd}$

Il coefficiente di momento equivalente β_M consente di valutare la dipendenza μ alla distribuzione del momento lungo l'asta.

Diagramma del momento	Coefficiente di momento equivalente uniforme β_M
Momenti all'estremità  $-1 \leq \psi \leq 1$	$\beta_{M,\psi} = 1,8 - 0,7 \psi$
Momenti dovuti a carichi laterali nel piano 	$\beta_{M,Q} = 1,3$ $\beta_{M,Q} = 1,4$
Momenti dovuti a carichi laterali nel piano più momenti d'estremità 	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M} (\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$ $M_Q = \max M$ dovuto al solo carico laterale $\Delta M = \begin{cases} \max M & \text{per diagramma del momento senza scambio di segno} \\ \max M + \min M & \text{per diagramma del momento con cambio di segno} \end{cases}$

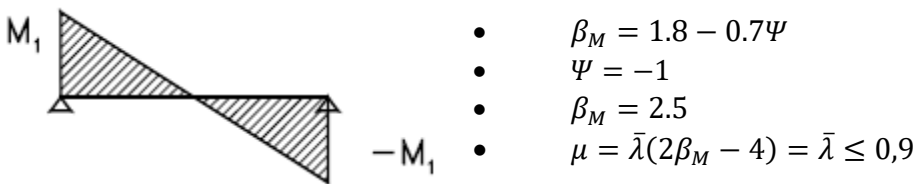
A concludere la trattazione dell'instabilità dell'asta pressoinflessa secondo l'Eurocodice 3, vengono riportati alcuni semplici esempi di calcolo.

Caso 1 – Momento Costante



Il valore negativo di μ giustifica la formula stessa in quanto per μ negativo il parametro k risulta maggiore dell'unità.

Caso 2 – Diagramma a Farfalla



In questo caso k diminuisce all'aumentare di N ; tale andamento è funzione della distribuzione del momento all'interno dell'asta (massimo in prossimità dei vincoli, nullo in mezzeria) rispetto alla distribuzione del momento del secondo ordine (massimo in mezzeria, nullo in prossimità dei vincoli). Potremmo, dunque, affermare che non vi è interazione tra il momento del primo e il momento del secondo ordine.